第27卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 2
2010年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0242-07

一种改进的水平集方法在Navier-Stokes问题形状优化中的应用*

段献葆， 秦新强

(西安理工大学理学院，西安 710048)

摘 要: 本文将经典的形状灵敏度分析方法与一种改进的水平集方法相结合，给出了Navier-Stokes问题形状优化的一种新方法。该算法是在固定的Euler网格上进行计算且在优化过程中不需要对水平集函数进行重新初始化，从而可以有效地节省计算时间。数值算例说明该算法是稳定、高效的。

关键词: 形状优化；灵敏度分析；Navier-Stokes问题；水平集方法

分类号: AMS(2000) 65N30 **中图分类号**: O242. 21 **文献标识码**: A

1 引言

作为最优控制的一个分支，流体力学中的形状最优化问题很早就得到科技工作者和工程师们的关注，并已取得许多非常好的成果[1-3]。在形状最优化的问题中，最常用的工具是灵敏度分析。但是在通常情况下，基于灵敏度分析的优化算法在计算过程中都需要网格的重新划分，这使得计算量非常大。

由Osher和Sethian提出的水平集方法[4]，最近被引入到形状最优化问题的研究中，并取得了很多非常好的应用[5-9]。与传统的形状最优化方法不同，水平集方法是在固定的欧拉网格上进行的，即在计算过程中网格只需剖分一次，从而能有效的节省计算时间。

在水平集方法的实施过程中，移动的波前或界面是用水平集函数的零水平集来表示的。这要求水平集函数在演化的过程中要保持为有向距离函数，但这一性质是很难保持的。一种常用的修正方法是在演化的过程中对水平集函数进行不断的重新初始化。但重新初始化的过程是非常复杂也非常费时的，而且对边界有很强的依赖性。最近Chan等学者提出了一种基于变分原理的水平集方法，这一方法在水平集函数演化的过程中不再需要对水平集函数进行重新初始化[10]。从而可以进一步提高计算效率。

本文在前人工作的基础上，特别是水平集方法在图像处理及结构力学形状优化方面的应用，给出了Navier-Stokes问题形状最优化的一种新算法。在这个方法中，我们将传统的形状灵敏度分析与改进的水平集方法相结合，该算法在优化过程中不需要网格的重新剖分，也不需要对水平集函数进行重新初始化，从而有效地减少了运算工作量和计算时间。后面提供的数值算例也验证了这一点。

收稿日期: 2009-10-28. **作者简介**: 段献葆 (1974年10月生)，男，博士，讲师. 研究方向：偏微分方程数值解与计算流体力学.

*__基金项目__: 陕西省教育厅专项科研计划项目 (9JK613)；国家自然科学基金数学天元青年基金 (10926152).

2 优化问题模型及形状灵敏度分析

设 $\Omega \in \mathbf{R}^2$ 是一个具有光滑边界 $\Gamma := \partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_d$ 的有界开区域，考虑 Ω 上的二维不可压缩定常 Navier-Stokes 问题

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \text{div}\mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{在 } \Gamma_c \text{ 上}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}, & \text{在 } \Gamma_d \text{ 上}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\nu = 1/Re$ (Re 为雷诺数) 表示动力学粘性系数，$\mathbf{u}$ 表示速度，p 表示压力，$\mathbf{f}$ 为体积力。

设速度 $\mathbf{u}$ 的检验函数空间为 $\mathbf{H}^1_{\Gamma_c}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega), v|_{\Gamma_c} = 0\}$。压力项 p 的检验函数空间为 $L^2_0(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), \int_\Omega p\mathrm{d}x = 0\}$。为了定义 Navier-Stokes 方程的弱形式，引入下面的双线性形式

$$a(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) = \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}\mathrm{d}x, \quad \forall\, \mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \tag{2}$$

和

$$b(\mathbf{v}, q) = -\int_\Omega q\text{div}\mathbf{v}\mathrm{d}x, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{3}$$

以及三线性形式

$$c(\mathbf{w};\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega w_j\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)v_i\mathrm{d}x, \quad \forall\, \mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{4}$$

由 Green 公式，可以得到下面的弱形式：求 $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$，使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) + c(\mathbf{u};\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f},\ \mathbf{v}), & \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & \forall\, q \in L^2_0(\Omega), \\ \langle\mathbf{u}, \mathbf{s}\rangle_{\Gamma_d} = \langle\mathbf{g}, \mathbf{s}\rangle_{\Gamma_d}, & \forall\, \mathbf{s} \in H^{-1/2}(\Gamma_d), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Gamma_c}$ 表示 $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_c) := (\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_c))^*$ 和 $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_c)$ 上的对偶积。显然，由 Sobolev 空间的嵌入定理以及 Hölder 不等式，我们可以得到：$a(\cdot,\cdot)$ 和 $b(\cdot,\cdot)$ 分别在 $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ 和 $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ 上连续；而 $c(\cdot,\cdot,\cdot)$ 在 $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ 上连续。从而可知 Navier-Stokes 方程 (5) 的解是存在且唯一的。

目标泛函的一般形式为

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_\Omega j(\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})\mathrm{d}x. \tag{6}$$

形状最优化问题的一般提法为：求 $\mathbf{u}$ 在满足 Navier-Stokes 问题 (5) 的情况下使得目标泛函 (6) 达到最小。

为了应用梯度算法，我们将使用一些经典的形状灵敏度方法的结论。设有界开集 $\Omega \subset \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$ 为一参考区域，其中 $\mathcal{D}$ 为包含所有可行区域的工作区域，考虑如下形式的区域

$$\Omega(\mathbf{h}) = (Id + \mathbf{h})(\Omega) := \{x + \mathbf{h}(x), x \in \Omega\}.$$

其中 $\mathbf{h} \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ 为一个小的摄动量，Id 为恒等算子，开集 $\Omega(\mathbf{h})$ 是对初始区域 Ω 的一个摄动，而 $(Id + \mathbf{h})$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个微分同胚。

目标泛函 $\mathcal{J}(\Omega)$ 在 Ω 的形状导数定义为 $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$ 上在 0 点处的 Fréchet 导数为

$$\mathcal{J}\big((Id+\mathbf{h})(\Omega)\big)=\mathcal{J}(\Omega)+\mathcal{J}'(\Omega)(\mathbf{h})+o(\mathbf{h}), \tag{7}$$

其中 $\mathcal{J}'(\Omega)$ 在 $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$ 上是线性连续的。

由 Hadamard 结构定理可知，方向导数 $\mathcal{J}'(\Omega)(\mathbf{h})$ 只依赖于边界 Γ 上的法向迹 $\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}$，即：

引理 1[1] 设 Ω 为具有光滑边界的开区域且 $j(\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})\in W^{1,1}(\mathbf{R}^2)$，则目标泛函 (6) 在 Ω 上可导，且其导数为

$$\mathcal{J}'(\Omega)(\mathbf{h})=\int_\Omega \mathrm{div}\big(\mathbf{h}(x)j(\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})\big)\mathrm{d}x=\int_\Gamma \mathbf{h}(x)\cdot\mathbf{n}(x)j(\mathbf{u},\nabla\mathbf{u})\mathrm{d}s, \tag{8}$$

对任意的 $\mathbf{h}\in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$。其中 $\mathbf{n}$ 为单位外法向量。

本文研究关于 Navier-Stokes 问题 (5) 的最小曳引力问题，即目标泛函为

$$\min_{\Omega\in\mathcal{D}}\hat{\mathcal{J}}(\Omega)=\int_\Omega|\nabla\mathbf{u}|^2\mathrm{d}x, \tag{9}$$

其中 $\mathcal{D}$ 为包含所有容许区域 Ω 的区域，$\mathbf{u}$ 为方程组 (5) 的解。

由 Green 公式及引理 1，可以得到。

定理 1[3] 设 Ω 为具有光滑边界的有界开区域，$\mathbf{h}\in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^2)$。假如 $\mathbf{f}$ 及 (5) 的解 $\mathbf{u}$ 足够光滑，如设 $\mathbf{f}\in H^1(\Omega)$，$\mathbf{u}\in H^2(\Omega)$，则目标泛函 (9) 的形状导数为

$$\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}(\Omega)\mathbf{h}=\nu\int_\Gamma\Big[\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}\Big)^2-\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{n}}\Big]\mathbf{h}\mathrm{d}s, \tag{10}$$

其中 $(\mathbf{u},p)$ 为方程组 (5) 的解，而 $(\mathbf{w},q)$ 是如下共轭方程组的解

$$\begin{cases}-\nu\Delta\mathbf{w}-(\mathbf{u}\nabla\mathbf{w}+(\nabla\mathbf{w})\mathbf{u})+\nabla q=-2\nu\Delta\mathbf{u}, & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\ \mathrm{div}\mathbf{w}=0, & \text{在 }\Omega\text{ 内},\\ \mathbf{w}=0, & \text{在 }\Gamma\text{ 上}.\end{cases} \tag{11}$$

3 改进的水平集方法

$\mathcal{D}\subset\mathbf{R}^2$ 为包含所有可能区域的 Ω 容许形状区域，设存在一个函数 $\phi(x)$，即水平集函数，满足

$$\begin{cases}\phi(x)>0, & \forall\, x\in\Omega,\\ \phi(x)=0, & \forall\, x\in\Gamma:=\partial\Omega,\\ \phi(x)<0, & \forall\, x\in\mathcal{D}\backslash\overline{\Omega},\end{cases}$$

单位法向量 $\mathbf{n}$ 以及表面曲率 κ 分别为

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\quad\text{和}\quad\kappa=\nabla\cdot\mathbf{n}=\mathrm{div}\Big(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\Big).$$

在优化的过程中，区域的边界由水平集函数 $\phi(x)$ 的零等值面来表示。水平集函数 $\phi(x)$ 可以通过求解如下的 Hamilton-Jacobi 方程得到

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}-V|\nabla\phi(x,t)|=0. \tag{12}$$

如上所述，在优化的过程中，要保持水平集函数为一个距离函数。我们知道距离函数必需满足性质 $|\nabla\phi(x)| = 1$；反之，如果一个函数 $\phi(x)$ 满足 $|\nabla\phi(x)| = 1$，则 $\phi(x)$ 在相差一个常数的情况下也是一个距离函数。所以我们引入如下的积分式来衡量一个函数 $\phi(x)$ 是否为 $\Omega \in \mathbf{R}^2$ 内的距离函数

$$\mathfrak{D}(\phi(x)) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2}\Big(|\nabla\phi| - 1\Big)^2 \mathrm{d}x. \tag{13}$$

设 $\phi(x)$ 在区域 $\mathcal{D}$ 的边界上的法向导数为零，即

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial n} = 0, \quad 在 \ \partial\mathcal{D} \ 上, \tag{14}$$

则 $\mathfrak{D}(\phi(x))$ 关于 $\phi(x)$ 在 ψ 方向上的 Gateau 导数为

$$\Big(\frac{\partial\mathfrak{D}(\phi(x))}{\partial\phi}, \psi\Big) = -\int_{\mathcal{D}} (\Delta\phi - \kappa)\psi \mathrm{d}x.$$

由定理1，形状导数可以写为如下的形式

$$\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}(\Omega)h = \int_{\Gamma} V\mathbf{h}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s.$$

因为在形状导数 (10) 中，**u**,**w** 以及 **n** 在整个区域 $\mathcal{D}$ 上有定义，所以可以在整个区域 $\mathcal{D}$ 而不仅是边界 Γ 上定义下降方向 $\mathbf{h} = -V\mathbf{n}$。$\mathbf{h}$ 的法向分量 $\mathbf{h}\cdot\mathbf{n} = -V$ 可以做为 Hamilton-Jacobi 方程 (12) 的对流方向。在我们的算法中，水平集函数由下面改进了的 Hamilton-Jacobi 方程求得

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} - V|\nabla\phi(x,t)| - \lambda\Big(\Delta\phi(x,t) - \kappa\Big) = 0, \tag{15}$$

其中 λ 为平衡 $(\Delta\phi(x,t) - \kappa)$ 项影响的一个正常数。在方程式 (15) 的左端，第二项使得水平集函数的零等值线趋向于区域的边界，而第三项使得水平集函数 $\phi(x,t)$ 在优化过程中保持为一个距离函数。所以在整个过程中重新初始化不再是必要的了。

4　数值算法及算例

在上面理论分析的基础上，可以得到本文所采用的算法。

1)　给定初始区域 Ω_0，并相应地初始化水平集函数 $\phi_0(x)$；

2)　对于 $k \geq 0$ 进行迭代，直至收敛：

　2.1)　由方程组 (5) 和 (11) 分别求得状态变量 $\mathbf{u}_k$ 和共轭变量 $\mathbf{w}_k$，然后通过 (10) 式求得目标泛函的形状导数；

　2.2)　求解改进了的 Hamilton-Jacobi 方程 (15)，得到新的水平集函数 ϕ_{k+1}。新的区域边界 $\Gamma_{k+1} = \partial\Omega_{k+1}$ 由水平集函数 ϕ_{k+1} 的零等值面确定。

在上面所提算法中，不需要考虑水平集函数的重新初始化过程。

考虑经典的流线体的优化问题。该算例曾经在文献[1,3]中被研究过。设计区域如图1所示，流体以恒定的速度从左向右，从靠近区域边界的部分流过，其余部分为需要优化的部分。容许形状集为

$$\mathcal{D} = \Big\{\Omega : \Omega \subset \mathcal{D}, \ |\Omega| = \gamma|\mathcal{D}|\Big\}, \tag{16}$$

其中 $|\cdot|$ 表示面积，γ 为面积比，是0到1之间的一个已知常数。为了与文献 [1,3] 中的计算结果做比较，我们取雷诺数 $Re = 10$。λ 取值都为1。优化过程中都没有对水平集函数进行重新初始化。

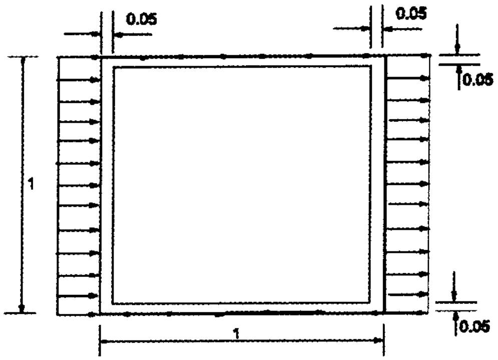

图 1: 流线体的设计区域

作为比较，这里考虑了两种情形，一种是体积比为 $\gamma = 0.75$，一种是体积比为 $\gamma = 0.9$。图 2 至图 5 是所得到的计算结果，其中左边一栏是体积比为 $\gamma = 0.75$ 的情形，右边一栏是体积比为 $\gamma = 0.9$ 的情形。图 2，图 3 分别给出了得到最优形状地对应的流场图。图 4，图 5 是得到最优形状时水平集函数的表面视图。图 6 为目标泛函在每一步迭代时的值。从计算结果可以看出，用本文所提算法得到的结果与文献 [1,3] 中所得的结果是一致的。

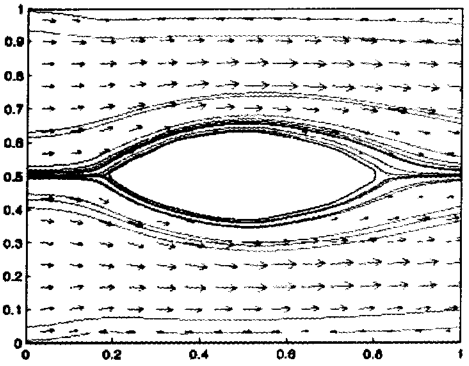

图 2: 最优形状对应的流场 ($\gamma = 0.75$)

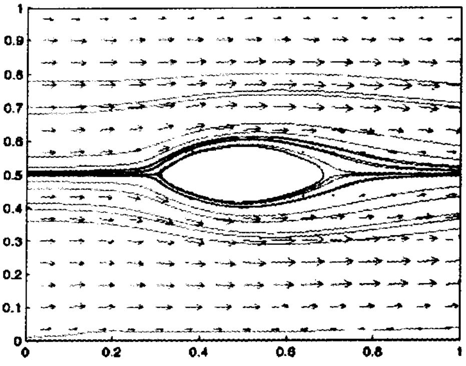

图 3: 最优形状对应的流场 (γ=0.9)

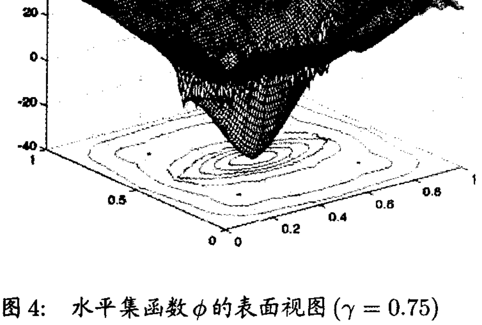

图 4: 水平集函数 ϕ 的表面视图 ($\gamma = 0.75$)

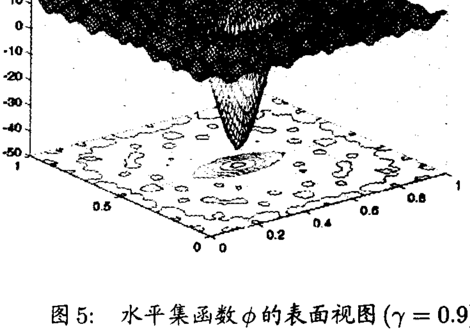

图 5: 水平集函数 ϕ 的表面视图 ($\gamma = 0.9$)

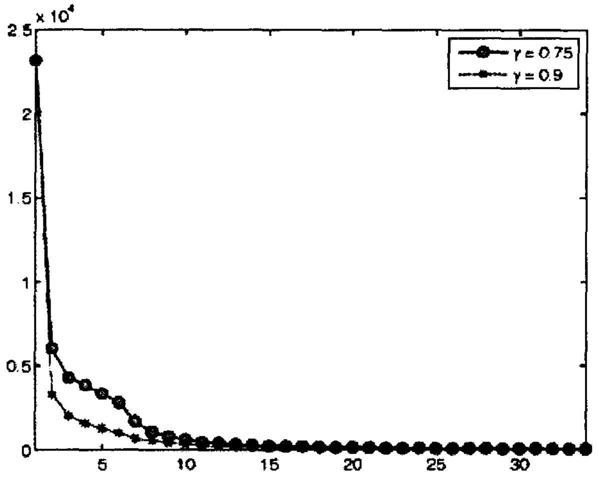

图 6:　流线体优化问题中目标泛函的收敛过程

5　结论

本文提出了一种 Navier-Stokes 问题形状优化的新算法。与以前的算法相比，本算法存在如下优点：算法容易实施，并且是在固定的 Euler 网格上进行计算，也不需要重新初始化，因而运算量大大减少；对初始形状和拓扑结构依赖性不是特别强，这使得在实际计算中初始形状的选取和水平集函数的初始化更容易。数值实验结果也表明了算法的稳定性、高效性和对初始形状的不敏感性。

参考文献：

[1] Sokolowski J, Zolesio J P. Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis[M]. Berlin: Springer Series in Computational Mathematics, 1992, 10

[2] Borrvall T, Petersson J. Topology optimization of fluid in Stokes flow[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2003, (41): 77-107

[3] Modhammadi B, Pironneau O. Applied Shape Optimization for Fluids[M]. Oxford: Clarendon Press, 2001

[4] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. J Comp Phys, 1988, (79): 12-49

[5] Allaire G, *et al.* A level-set method for shape optimization[J]. C R Acad Sci Paris Ser I, 2002, 334: 1125-1130

[6] Duan X B, *et al.* Optimal shape control of fluid flow using variational level set method[J]. Physics Letters A, 2008, 372(9): 1374-1379

[7] 段现报，马逸尘. 变分水平集方法在Stokes问题形状识别中的应用[J]. 西安交通大学学报，2008, 10(10): 1313-1316
Duan X B, Ma Y C. Shape identification for Stokes problem using variational level set method[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 10(10): 1313-1316

[8] Allair G, *et al.* Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. Journal of Computational Physics, 2004, (194): 363-393

[9] Mei Y L, Wang X M. A level set method for structural topology optimization and its applications[J]. Advances in Engineering Software, 2004, (7): 415-441

[10] Chan T, Vese L. Active contours without edges[J]. IEEE Trans Imag Proc, 2001, (10): 266-277

An Improved Level Set Method for the Shape Optimization of Navier-Stokes Problems

DUAN Xian-bao, QIN Xin-qiang

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

Abstract: Based on the classical shape sensitivity and the variational principle, a new level set method is proposed for the optimal shape control of the steady-state Navier-Stokes fluid flow. The cost of this method is moderate since the shape is captured on a fixed Eulerian mesh. Furthermore, unlike the classical level set method, the re-initialization procedure is not necessary during the optimization process. Promising features of the proposed method are illustrated by several numerical examples.

Keywords: shape optimization; sensitivity analysis; Navier-Stokes problem; level set methods

Received: 28 Oct 2009. **Accepted:** 16 Dec 2009.

Foundation item: The Research Foundation of Department of Education of Shaanxi Province (9JK613); the National Natural Science Foundation of China (10926152).